ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1) ΝΔΟ αν $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})+(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})+(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})=0$ τότε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ συνεπίπεδα. (Εξεταστική Μαθ. Πάτρας 2002)

ΛΥΣΗ

Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμμικώς εξαρτημένα $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}=0.$$

Πολ/με την αρχική σχέση με (α). Άρα, θα είναι:

$$\cancel{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})}^{0}+\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})+\cancel{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})}^{0}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=0 \Rightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0 \Rightarrow \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma} \text{ συνεπίπεδα.}$$

2) Έστω $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ μη μηδενικά και μη παράλληλα ανά 2 διανύσματα. ΝΔΟ: $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$.

ΛΥΣΗ

Έστω, ότι ισχύει $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, επομένως:

- $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow \vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\vec{u}\times\vec{u}}^{0}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{u}\times\vec{w} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}\times\vec{u}$ (1)

- $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}\times(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\vec{0} \Rightarrow$

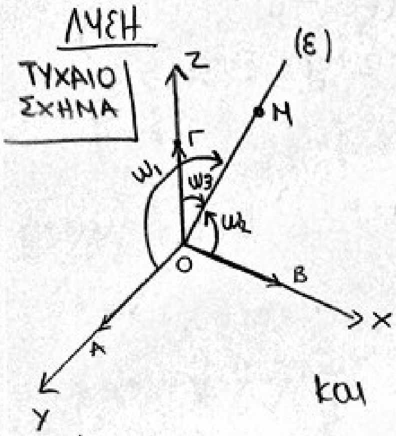
$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{u}+\cancel{\vec{v}\times\vec{v}}^{0}+\vec{v}\times\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{v}\times\vec{w} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}$ (2)

Από (1) και (2) $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$.

3) Μια ευθεία (ε) σχηματίζει <u>ίσες γωνίες</u> με τις ακμές μιας ορθής τρίεδρης γωνίας. Να βρεθούν οι γωνίες αυτές

ΛΥΣΗ



• Έστω $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{O\Gamma}| = 1$ και M τυχαίο της (ε)

$\vec{OA} = (1,0,0)$, $\vec{OB} = (0,1,0)$, $\vec{O\Gamma} = (0,0,1)$

καθώς $\vec{OM} = (x,y,z)$

• Έστω, επίσης $\omega_1 = (\widehat{\vec{OA},\vec{OM}})$, $\omega_2 = (\widehat{\vec{OB},\vec{OM}})$

και $\omega_3 = (\widehat{\vec{OA},\vec{OM}})$. $(\omega_1 = \omega_2 = \omega_3)$

Έπειτα, $$\sigma\upsilon\nu\omega_1 = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OM}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OM}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega_2 = \frac{\vec{OB}\cdot\vec{OM}}{|\vec{OB}|\cdot|\vec{OM}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega_3 = \frac{\vec{O\Gamma}\cdot\vec{OM}}{|\vec{O\Gamma}|\cdot|\vec{OM}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu\omega_1 = \sigma\upsilon\nu\omega_2 = \sigma\upsilon\nu\omega_3 \Rightarrow x = y = z$

Άρα, $$\sigma\upsilon\nu\omega_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4) ΝΔΟ $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})+\vec{\beta}\times(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})+\vec{\gamma}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=0$

(Ταυτότητα Jacobi)

ΛΥΣΗ

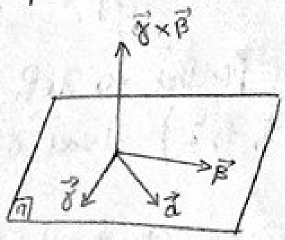
$\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})+\vec{\beta}\times(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})+\vec{\gamma}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=$

$=\cancel{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}}-\cancel{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}}+\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\gamma}}-\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{\alpha}}+\cancel{(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}}-\cancel{(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha})\vec{\beta}}=0$

5) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{d}=1$, $\vec{\beta}\cdot\vec{d}=0$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{d}=0$, $\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\neq 0$

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{d}$ (για $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γνωστά)

ΛΥΣΗ



$$\left.\begin{array}{l}\vec{\beta}\cdot\vec{d}=0\Rightarrow\vec{\beta}\perp\vec{d}\\ \vec{\gamma}\cdot\vec{d}=0\Rightarrow\vec{\gamma}\perp\vec{d}\end{array}\right\}\vec{d}\parallel\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$$

$\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\neq 0\Leftrightarrow\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμμ. ανεξάρτητα

Έστω τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ επί του επιπέδου (Π)

Το ότι $\vec{d}\parallel\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{d}=\lambda(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\xRightarrow{(\cdot\vec{\alpha})}\vec{\alpha}\cdot\vec{d}=\lambda\vec{\alpha}(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\Rightarrow$

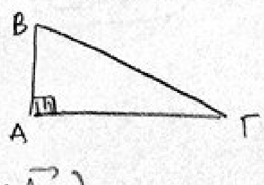
$\Rightarrow\lambda\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=1\Rightarrow\lambda\cdot(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=1\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})}$

Άρα, $\vec{d}=\dfrac{1}{(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})}(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\neq 0$ [αλλιώς θα ήταν συνεπίπεδα και το $\vec{\alpha}\perp\vec{d}$ Αδύνατον.]

6) Δείξτε διανυσματικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα

(Εξεταστική Μαθ. Ιωαννίνων 2001)

ΛΥΣΗ



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

$(B\Gamma)^2=|\vec{B\Gamma}|^2=\vec{B\Gamma}\cdot\vec{B\Gamma}=(\vec{BA}+\vec{A\Gamma})(\vec{BA}+\vec{A\Gamma})=$

$=|\vec{BA}|^2+\cancel{\vec{BA}\cdot\vec{A\Gamma}}+\cancel{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{BA}}+|\vec{A\Gamma}|^2=$

$=|\vec{BA}|^2+|\vec{A\Gamma}|^2$ (Προσοχή τα $\vec{BA}\cdot\vec{A\Gamma}=0$ γιατί $\vec{BA}\perp\vec{A\Gamma}$)

7) ΝΔΟ $|\vec{a}\times\vec{\beta}| = \sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{\beta}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}$

ΛΥΣΗ

$$|\vec{a}\times\beta|^2 = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\cdot \eta\mu^2(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}) = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})\right) =$$

$$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2 - |\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}) =$$

$$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 =$$

$$= \vec{a}^2\cdot\vec{\beta}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2$$

Άρα, $|\vec{a}\times\vec{\beta}| = \sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{\beta}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}$

8) Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ όπου τα $A(1,2,3)$, $B(-1,2,2)$ και $\Gamma(3,\lambda,2)$ είναι συνευθειακά

ΛΥΣΗ

Αφού, τα A, B, Γ συνευθειακά $\Rightarrow \vec{AB}\parallel\vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{AB}\times\vec{A\Gamma} = \vec{0}$ ①

$\vec{AB} = (-1-1,\ 2-2,\ 2-3) = (-2,0,-1) = (2,0,1)$

$\vec{A\Gamma} = (3-1,\ \lambda-2,\ 2-3) = (2,\lambda-2,-1)$

① $(\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-\lambda,\ 2-2,\ 2(\lambda-2)) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-\lambda,\ 0,\ 2\lambda-4) = \vec{0}$

$\Rightarrow 2-\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

9) Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2,3)$ και $\vec{\beta}=(0,1,0)$ καθώς και το επίπεδο $(\Pi): x-y+z-1=0$

i) ΝΔΟ τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ γραμμ. ανεξάρτητα

ii) Να βρεθεί μια βάση του R^3, που να περιέχει τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

iii) Να βρεθούν οι συνιστώσες του $\vec{\gamma}=(8,-10,4)$ ως προς τη βάση του (ii)

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

v) Να υπολογιστεί το: $(((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta})\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$

<u>ΛΥΣΗ</u> (Εξεταστική Μαθ. Ιωαννίνων 2005)

i) <u>α' τρόπος</u>: Έστω ότι $\exists(\lambda,\mu)\neq 0$ ώστε:

$$\vec{\alpha}\lambda+\vec{\beta}\mu=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,2,3)\lambda+(0,1,0)\mu=\vec{0}\Rightarrow(\lambda,2\lambda+\mu,3\lambda)=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=0} \text{ και } 2\lambda+\mu=0 \text{ και } 3\lambda=0$$

$$\boxed{\mu=0}$$

Άρα, τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ γραμμ. ανεξάρτητα

<u>β' τρόπος</u>

Παίρνοντας το λόγο των διανυσμάτων παρατηρούμε πως:

$\frac{1}{0}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{3}{0}$ άρα τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ γραμμ. ανεξάρτητα

<u>γ' τρόπος</u>

Αρκεί τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά

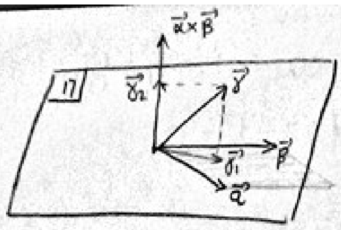
Έστω συγγραμμικά άρα $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\Rightarrow(1,2,3)=\lambda(0,1,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow(1,2,3)=(0,\lambda,0)$ Άτοπο

Άρα, τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ γραμμ. ανεξάρτητα.

ii) Μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που να περιέχει τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι η $V=\langle(1,2,3),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ αν επεκτείναμε τη την αρχική βάση σε βάση όλου του χώρου $\mathbb{R}^3$.

iii)



$\vec\gamma = \vec\gamma_1 + \vec\gamma_2$ οι ζητούμενες συνιστώσες

Επίσης, $\vec\gamma = \underbrace{\lambda\vec\alpha + \mu\vec\beta}_{\vec\gamma_1} + \underbrace{k\cdot\vec\alpha\times\vec\beta}_{\vec\gamma_2}$ ①

$$\vec\alpha\times\vec\beta = \begin{vmatrix} \vec x_0 & \vec y_0 & \vec z_0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3,0,-1) = (3,0,1)$$

$$① \leadsto (8,-10,4) = \lambda(1,2,3) + \mu(0,1,0) + k\cdot(3,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3k = 8 & ①' \\ 2\lambda + \mu = -10 \\ 3\lambda + k = 4 & ②' \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda + 3k = 8 \\ 3\lambda + k = 4 \end{cases} \Rightarrow -8\lambda = -4 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Για $\lambda = 2$, $2 + 3k = 8 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

Για $\lambda = 2$, $2\cdot 2 + \mu = -10 \Rightarrow \boxed{\mu = -14}$

Έτσι, $\vec\gamma_1 = 2(1,2,3) - 14(0,1,0) = (2,-10,-6)$

και $\vec\gamma_2 = 2\cdot(3,0,1) = (6,0,2)$

iv) $|\vec\alpha\times\vec\beta| = E_{\pi\alpha\rho.} = |\vec\alpha|\cdot|\vec\beta|\cdot\eta\mu(\vec\alpha,\vec\beta)$ Ασκ.7

$$= \sqrt{\vec\alpha^2\cdot\vec\beta^2 - (\vec\alpha\cdot\vec\beta)^2} = \sqrt{(1^2+2^2+3^2) - [(1,2,3)\cdot(0,1,0)]^2} =$$

$$= \sqrt{14 - 2^2} = \sqrt{14-4} = \sqrt{10} \text{ τ.μ.}$$

v) $$(((\vec\alpha\times\vec\beta)\times\vec\beta)\times\vec\beta)\cdot\vec\gamma = (((\vec\beta\cdot\vec\alpha)\vec\beta - |\vec\beta|^2\cdot\vec\alpha)\times\vec\beta)\cdot\vec\gamma =$$

$$= ((\vec\beta\cdot\vec\alpha)(\vec\beta\times\vec\gamma) - |\vec\beta|^2\cdot(\vec\alpha\times\vec\beta))\vec\gamma =$$

$$= \cancel{(\vec\beta\cdot\vec\alpha)(\vec\beta\times\vec\gamma)\cdot\vec\gamma}^{\,0} - |\vec\beta|^2\cdot(\vec\alpha\times\vec\beta)\vec\gamma =$$

$$= -|\vec\beta|^2\cdot(\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma) = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 + 3 = -1$$

10) Έστω τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta} \in V$

ΝΔΟ $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\vec{\delta} = (\vec{\delta},\vec{\beta},\vec{\gamma})\vec{\alpha} + (\vec{\alpha},\vec{\delta},\vec{\gamma})\vec{\beta} + (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\delta})\vec{\gamma}$

ΛΥΣΗ

i) Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ γραμμικώς εξαρτημένα τότε η σχέση ισχύει

ii) Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Rightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) \neq 0$ και $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma}$. (1)

(1) πολ/ζω με $\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$:

$$\vec{\delta}(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \lambda(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\vec{\alpha} + \cancel{\mu(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\vec{\beta}}^{\,0} + \cancel{\nu(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\vec{\gamma}}^{\,0} \Rightarrow (\vec{\delta},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \lambda(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta})}{(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})}.$$

(1) πολ/ζω με $\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$:

$$\vec{\delta}(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}) = \cancel{\lambda(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\vec{\alpha}}^{\,0} + \mu(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\vec{\beta} + \cancel{\nu(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\vec{\gamma}}^{\,0} \Rightarrow (\vec{\delta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}) = \mu(\vec{\gamma},\vec{\alpha},\vec{\beta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{(\vec{\delta},\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})}.$$

(1) πολ/ζω με $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$:

$$\vec{\delta}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) = \cancel{\lambda(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\vec{\alpha}}^{\,0} + \cancel{\mu(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\vec{\beta}}^{\,0} + \nu(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\delta},\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \nu(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{(\vec{\delta},\vec{\alpha},\vec{\beta})}{(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})}.$$

Άρα, στην (1) θα είναι:

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\vec{\delta} = (\vec{\delta},\vec{\beta},\vec{\gamma})\vec{\alpha} + (\vec{\alpha},\vec{\delta},\vec{\gamma})\vec{\beta} + (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\delta})\vec{\gamma}$$

11) Για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$ ισχυουν

- $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$
- $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$, $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 120^\circ$, $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\alpha}}) = 120^\circ$

ΝΔΟ

α) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμμικώς ανεξάρτητα

β) Να βρείτε τη γωνία των $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$ και $(\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι $\exists (k, \lambda, \mu)$ ώστε:

$$\vec{\alpha} k + \vec{\beta} \lambda + \vec{\gamma} \mu = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= 2 \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} &= -2 \\ \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} &= -2 \end{aligned}}$$

$(\cdot \alpha) \rightsquigarrow |\vec{\alpha}|^2 k + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \lambda + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \mu = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k + 2\lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow 2k + \lambda - \mu = 0$ ①

$(\cdot \beta) \rightsquigarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} k + |\vec{\beta}|^2 \lambda + \vec{\beta} \vec{\gamma} \mu = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k + 4\lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + 2\lambda - \mu = 0$ ②

$(\cdot \gamma)$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} k + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \lambda + |\vec{\gamma}|^2 \mu = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2k - 2\lambda + 4\mu = 0 \Rightarrow k + \lambda - 2\mu = 0$ ③

Αν επιλύσουμε ορίζουσα του συστήματος ①,②,③ προκύπτει:

$D \neq 0$ Άρα μοναδική ρίζα το 0, άρα $\lambda = \mu = k = 0$

γραμμικώς ανεξάρτητα

β) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}}) = \dfrac{(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})}{|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \, |\vec{\beta} \times \vec{\gamma}|} = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot [\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})]}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cdot \eta\mu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \cdot |\vec{\beta}||\vec{\gamma}| \cdot \eta\mu(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})} =$

$= \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \left((\vec{\beta} \vec{\gamma}) \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 \vec{\gamma} \right)}{4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - |\vec{\beta}|^2 \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})}{12} =$

$= \dfrac{(-2) \cdot 2 - 4 \cdot (-2)}{12} = \dfrac{-4 + 8}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}}) = \text{τοξσυν} \frac{1}{3}$

12) Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$ μοναδιαία και ανά 2 σχηματίζουν ίσες γωνίες ($\varphi \neq 0$)

α. Για ποιές τιμές του φ τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι:

i) γραμμικώς εξαρτημένα

ii) —"— ανεξάρτητα

β. $\vec{\delta} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, είναι το $\vec{\delta} \parallel (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\times(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})$;

γ. αν $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad, Να υπολογιστεί:

$$A = \left[\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}))\right]\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Έστω ότι υπάρχουν κ, λ, μ ώστε:

$$\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}=\vec{0}$$

$(\cdot\vec{\alpha})$: $\kappa|\vec{\alpha}|^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow \kappa+\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi+\mu\sigma\upsilon\nu\varphi=0$

$(\cdot\vec{\beta})$: $\kappa\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda|\vec{\beta}|^2+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow \kappa\sigma\upsilon\nu\varphi+\lambda+\mu\sigma\upsilon\nu\varphi=0$

$(\cdot\vec{\gamma})$: $\kappa\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\mu|\vec{\gamma}|^2=\vec{0} \Rightarrow \kappa\sigma\upsilon\nu\varphi+\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi+\mu=0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \\ \sigma\upsilon\nu\varphi & 1 & \sigma\upsilon\nu\varphi \\ \sigma\upsilon\nu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi & 1 \end{vmatrix} = (1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot(-2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi+1)=0$$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 1$ ή $(\sigma\upsilon\nu\varphi+\frac{1}{2})\cdot(\sigma\upsilon\nu\varphi-1)=0$

$\varphi = 0$ ή $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ συγγραμμικά άρα γραμμ. εξαρτημένα | Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμμ. ανεξάρτητα. μη συγγραμμικά

β. Αρκεί, $\vec{\delta}\times\left[(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\times(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\right]=0$

(αναπτύσσουμε την παράσταση)

γ. $A = \left[\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}))\right]\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \left(\vec{\alpha}\times((\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|^2\vec{\beta})\right)(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) =$

$= \left[\cancel{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\overset{0}{(\vec{\alpha}\times\vec{\alpha})}}-|\vec{\alpha}|^2(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\right](\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \dots = \frac{1}{4}$

13) Αν $\vec{\beta}=(1,2,3)$ και $\vec{\gamma}=(7,1,-3)$

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν $\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{x}$

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{x}=(x,y,z)$

$$\vec{\gamma}\times\vec{x}=\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 7 & 1 & -3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=(z+3y,-7z-3x,7y-x)$$

$\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{x} \Rightarrow (x,y,z)=(1,2,3)+(z+3y,-7z-3x,7y-x)$

$\Rightarrow (x,y,z)=(z+3y+1,-7z-3x+2,7y-x+3)$

$x=z+3y+1$

$y=-7z-3x+2 \Rightarrow y=-7z-3(z+3y+1)+2 \Rightarrow$

$z=7y-x+3 \qquad \Rightarrow y=-7z-3z-9y-3+2 \Rightarrow$

$\Downarrow \qquad \Rightarrow \boxed{10y=-10z-1}$ ①

$z=7y-(z+3y+1)+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=7y-3z-z-1+3 \Rightarrow z=4y-z+2 \Rightarrow 2z=4y+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z=2y+1}$ ②

② → ① είναι.

$10y=-10(2y+1)-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10y=-20y-11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30y=-11 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{11}{30}}$

② → $z=2\left(-\frac{11}{30}\right)+1=-\frac{11}{15}+1=\frac{-11+15}{15}=\frac{4}{15}$

$\Rightarrow \boxed{z=\frac{4}{15}}$ και $x=\frac{4}{15}+3\left(-\frac{11}{30}\right)+1=$

$=\frac{8}{30}-\frac{33}{30}+\frac{30}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{30}}$

$\vec{x}=\left(\frac{5}{30},-\frac{11}{30},\frac{4}{15}\right)=$

$=(5,-11,60)$

14) Δίνονται τα $\vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\rho} = \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \neq \vec{0}$, ενώ

ΝΔΟ $\quad \vec{r} \times (\vec{\rho} \times \vec{r}) = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

$\vec{\alpha}, \vec{\rho}$ συγγραμμικά

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί νδο $\vec{\alpha} // \vec{\rho} \Leftarrow \vec{\alpha} \times \vec{\rho} = 0$

$\vec{r} \times (\vec{\rho} \times \vec{r}) = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{r}^2 \cdot \rho - (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) \vec{r} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})} - ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}))(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \cancel{(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})} \Rightarrow$

$\Rightarrow ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}))(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = 0 \overset{\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})} - |\vec{\beta}|^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$

$\vec{\alpha} \times \vec{\rho} = \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \cancel{(\vec{\alpha} \vec{\gamma}) \vec{\beta}} - \cancel{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\rho}$

15) ΝΔΟ

α. $\{[((\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\alpha}) \times \vec{\alpha}] \times \vec{\alpha}\} \times \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^4 \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})$

β. $[(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}] \times [(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\beta}] = -|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}|^2 \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. $\{[((\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|^2 \beta) \times \vec{\alpha}] \times \vec{\alpha}\} \times \vec{\alpha} =$

$= \{[(\cancel{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\alpha} \times \vec{\alpha})} - |\vec{\alpha}|^2 \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})] \times \vec{\alpha}\} \times \vec{\alpha} =$

$= \{-|\alpha|^2 \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\alpha}\} \times \vec{\alpha} = -\{|\alpha|^2 \cdot ((\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|^2 \vec{\beta}\} \times \vec{\alpha} =$

$= -\left\{ |\vec{a}|^2 \left(\cancel{(\vec{a}\cdot\vec{\beta})(\vec{a}\times\vec{a})}^{0} - |\vec{a}|^2 \cdot (\vec{\beta}\times\vec{a}) \right) \right\} =$

$= -\left\{ |\vec{a}|^2 \left(-|\vec{a}|^2 \cdot (\vec{\beta}\times\vec{a}) \right) \right\} =$

$= \quad |\vec{a}|^4 \cdot (\vec{\beta}\times\vec{a})$

β. $\quad [(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{a}]\times[(\vec{\beta}\times\vec{a})\times\vec{\beta}] =$

$= \left[|\vec{a}|^2 \cdot \beta - (\vec{a}\vec{\beta})\vec{a} \right] \times \left[|\vec{\beta}|^2 \vec{a} - (\vec{a}\vec{\beta})\vec{\beta} \right] =$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 (\vec{\beta}\times\vec{a}) - \cancel{(\vec{a}\cdot\vec{\beta})|\vec{\beta}|^2(\vec{a}\times\vec{a})}^{0} - \cancel{|\vec{a}|^2(\vec{a}\vec{\beta})(\vec{\beta}\times\vec{\beta})}^{0} + (\vec{a}\vec{\beta})^2 \cdot (\vec{a}\times\vec{\beta})$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 (\vec{\beta}\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 \cdot (\vec{a}\times\vec{\beta}) =$

$= -|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 (\vec{a}\times\vec{\beta}) + (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 \cdot (\vec{a}\times\vec{\beta}) =$

$= \Big[\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\beta|^2}_{} \Big] (\vec{a}\times\vec{\beta}) \quad (1)$

Αρκει νδο $= |\vec{a}\times\vec{\beta}|^2$

$|\vec{a}\times\vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 \cdot \eta\mu^2(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 (1 - \sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})) =$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\vec{a},\vec{\beta}) =$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 = -\left((\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \right)$

Αρα, $(1) \rightsquigarrow \quad -|\vec{a}\times\vec{\beta}|^2 \cdot (\vec{a}\times\vec{\beta})$.

16) SOS) Έστω τα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμμικώς ανεξάρτητα
ΝΔΟ τα $\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}$ γραμμικώς ανεξάρτητα
Ισχύει τα αντίστροφο;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\exists\, \lambda, \mu, \nu$ ώστε:

$$\lambda(\vec{x}+\vec{y}) + \mu(\vec{y}+\vec{z}) + \nu(\vec{z}+\vec{x}) = \vec{0}$$

$$(\lambda+\nu)\vec{x} + (\lambda+\mu)\vec{y} + (\mu+\nu)\vec{z} = \vec{0}$$

Τα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμ. ανεξάρτητα

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\nu = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu = \mu \Rightarrow \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda+\mu = 0 \Rightarrow 2\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = 0} \\ \mu+\nu = 0 \Rightarrow \nu = -\mu \Rightarrow \boxed{\nu = 0} \end{cases}$$

Άρα, $\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}$ γραμ. ανεξάρτητα.

α' τρόπος

Έστω τα $\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}$ γραμ. ανεξ.
και ΘΔΟ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμ. ανεξ.
Από την υπόθεση ισχύει ότι:

$$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{x}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}, \vec{z}+\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{x})$$

$$\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + \cancel{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x})}^{0} + \cancel{(\vec{x}, \vec{z}, \vec{z})}^{0} + \cancel{(\vec{x}, \vec{z}, \vec{x})}^{0} + \cancel{(\vec{y}, \vec{y}, \vec{z})}^{0} + \cancel{(\vec{y}, \vec{y}, \vec{x})}^{0} + (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + \cancel{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{z})}^{0} = \neq 0$$

$$= 2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0$$, τα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ γραμ. ανεξ.

β' τρόπος

Έστω ότι $\exists\, k, \lambda, \mu$ ώστε $k\vec{x} + \lambda\vec{y} + \mu\vec{z} = \vec{0}$ ⊛

Έστω $\vec{x}+\vec{y} = \vec{\alpha}$, $\vec{y}+\vec{z} = \vec{\beta}$, $\vec{z}+\vec{x} = \vec{\gamma}$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη

$$2(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$

Άρα, $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

$\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma})$

$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha})$

$\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}$ γραμ. ανεξ. $\rightsquigarrow$ (*)

$$\lambda\cdot\frac{1}{2}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}) + \mu\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}) + \nu\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu-\nu)\vec{\alpha} + (-\lambda-\mu+\nu)\vec{\beta} + (\lambda-\mu+\nu)\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu-\nu=0 \\ -\lambda+\mu+\nu=0 \\ \lambda-\mu+\nu=0 \end{cases}$$

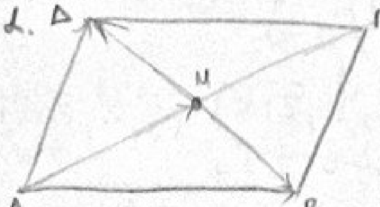
17) Έστω $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ διανύσματα μοναδιαία σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με διαγώνιους τα διανύσματα $2\vec{e_1}-\vec{e_2}, 4\vec{e_1}-5\vec{e_2}$.
2. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\times\vec{e_1}$ και $\vec{e_2}$

(Εξεταστική Μαθ. Ιωαννίνων 2005, 2004)

ΛΥΣΗ

1.



$\vec{A\Gamma} = 2\vec{e_1}-\vec{e_2}$

$\vec{B\Delta} = 4\vec{e_1}-5\vec{e_2}$

$|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1, \quad \vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\vec{AB} = \vec{AM}+\vec{MB} = \frac{1}{2}(2\vec{e_1}-\vec{e_2}) + \frac{1}{2}(5\vec{e_2}-4\vec{e_1}) = 2\vec{e_2}-\vec{e_1}$
- $\vec{A\Delta} = \vec{AM}+\vec{M\Delta} = \frac{1}{2}(2\vec{e_1}-\vec{e_2}) + \frac{1}{2}(4\vec{e_1}-5\vec{e_2}) = 3\vec{e_1}-3\vec{e_2}$

Δηλαδή $E_{AB\Gamma\Delta} = |\vec{AB}\times\vec{A\Delta}| = |(2\vec{e_2}-\vec{e_1})\times(3\vec{e_1}-3\vec{e_2})| =$

$= |-3\,\vec{e_1}\times\vec{e_2}| = 3\cdot|\vec{e_1}|\cdot|\vec{e_2}|\,\eta\mu(\vec{e_1},\vec{e_2}) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ τ.μ.

2. $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{(\vec{e_1}'\times\vec{e_2}')\times\vec{e_1}',\ \vec{e_2}'}\right)=\dfrac{[(\vec{e_1}'\times\vec{e_2}')\times\vec{e_1}']\cdot\vec{e_2}'}{|(\vec{e_1}'\times\vec{e_2}')\times\vec{e_1}'||\vec{e_2}'|}$ ①

$[(\vec{e_1}'\times\vec{e_2}')\times\vec{e_1}'] = \left(|\vec{e_1}'|^2\vec{e_2}' - (\vec{e_1}'\cdot\vec{e_2}')\vec{e_1}'\right) =$

$= \vec{e_2}' - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}'$

$|(\vec{e_1}'\times\vec{e_2}')\times\vec{e_1}'| = |\vec{e_2}' - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\rightsquigarrow$ $\dfrac{|\vec{e_2}|^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}\vec{e_2}}{|\vec{e_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}|\cdot|\vec{e_2}|} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ r.

SOS

18) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ και $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

i) ΝΔΟ τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γραμ. ανεξ.

ii) $A = [(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta}]\cdot\vec{\alpha} =$; και $B = [\vec{\alpha}\times(\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}))]\times\vec{\alpha}$.

~~Λύση~~ Να βρεθεί το $\vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$ να σχηματίζουν γωνίες ίσες μεταξύ τους και η τριάδα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ να ορίζει δεξιόστροφο σύστημα.

ΛΥΣΗ

i) Από τους λόγους $\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \neq \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \neq \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$, γραμ. ανεξάρτητα.

ii) $A = \left((\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2\vec{\alpha}\right)\vec{\alpha} = \left((\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - |\vec{\beta}|^2\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})\right) =$

$= \left(-\frac{1}{16}+\frac{3}{4}-\frac{3}{16}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\cdot 1 = -\frac{3}{4}$

ii) $B = \left[\vec{a} \times (|\vec{a}|^2\vec{\beta} - (\vec{a}\vec{\beta})\vec{a}\right] \times \vec{a} =$

$= \left[|\vec{a}|^2 \cdot (\vec{a} \times \vec{\beta}) - \cancel{(\vec{a}\cdot\vec{\beta})(\vec{a} \times \vec{a})}^{\,0}\right] \times \vec{\alpha} =$

$= |\vec{a}|^2 \cdot (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{a} = |\vec{a}|^2 (|\vec{a}|^2 \vec{\beta} - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}) =$

$= |\vec{a}|^4 \cdot \vec{\beta} - (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\,\vec{a}\,|\vec{a}|^2 = \ldots$

iii) Εστω $\vec{\gamma} = (x, y, z)$

$|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ①

$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|} = \dfrac{1}{2}$

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu(\vec{a}, \vec{\gamma}) = \sigma\upsilon\nu(\vec{a}, \vec{\beta}) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{\gamma}|} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{4}z = \dfrac{1}{2}$ ②

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a}, \vec{\gamma}}) = \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - \dfrac{\sqrt{3}}{4}z = \dfrac{1}{2}$ ③

Το συστημα ορίζεται δεξιοστροφα, άρα:

$(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) > 0$

Απο, ② + ③ $\Rightarrow \sqrt{3}y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

άρα $x = \sqrt{3}z$

Ετσι, προκύπτει ότι: $x = \pm\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{6}}{6} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

και $z = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\vec{\gamma} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ή $\vec{\gamma} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Παίρνω την ορίζουσα που είναι ίση με $(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ για καθε $\vec{\gamma}$ απο τα δυο και ενα θα απορριφθεί

19) Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του $\mathbb{R}^3$

Επίσης ισχύουν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\neq 0$ και $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$

καθώς $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$. ΝΔΟ τα $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτ.

ΛΥΣΗ (Εξεταστική Μαθ. Ιωαννίνων 2014)

α' τρόπος

Έστω ότι $\exists(k,\lambda,\mu)$ ώστε:

▸ $k(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})+\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\mu\vec{\gamma}=\vec{0}$

$(\cdot\alpha) \rightsquigarrow \quad \cancel{k\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})}^{0}+\lambda\vec{\alpha}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda|\vec{\alpha}|^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0}$ ①

$(\cdot\beta) \rightsquigarrow \quad \cancel{\lambda(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\vec{\beta}}^{0}+\lambda\vec{\beta}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda|\vec{\beta}|^2+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0}$ ②

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta},\vec{\gamma})\\ \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\end{array}\right\}\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}$$

Άρα, οι σχέσεις ① και ② είναι ίσες

ΔΗΛΑΔΗ, $\begin{cases}\lambda|\vec{\alpha}|^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\\ \lambda|\vec{\beta}|^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda(|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\\ \lambda(|\vec{\beta}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0\end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix}|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} & \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\\ |\vec{\beta}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} & \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\end{vmatrix}=0$

Άρα, $\exists(\lambda,\mu)\neq(0,0) \Rightarrow \exists(k,\lambda,\mu)\neq(0,0,0)$

ώστε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτημένα

β' τρόπος

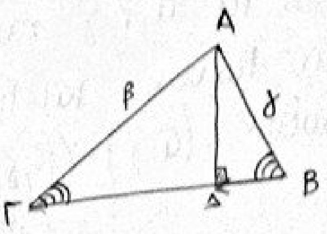
$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = ((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times(\vec{\alpha}+\vec{\beta}))\cdot\vec{\gamma} =$

$=((\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\alpha}+(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta})\vec{\gamma} =$

$=(|\vec{\alpha}|^2\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha}+(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2\vec{\alpha})\vec{\gamma} =$

$=(|\vec{\alpha}|^2(\vec{\beta}\vec{\gamma})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\beta}\vec{\gamma})-|\vec{\beta}|^2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})) = 0$

20) Δίνεται το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με ΑΔ το ύψος του ενώ $(B\Gamma\Delta) = \dfrac{\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}$ και $\vec{\beta} = |\vec{A\Gamma}|$, $\vec{\gamma} = |\vec{AB}|$. Να βρείτε το λόγο $(B\Gamma\Delta)$



<u>ΛΥΣΗ</u>

$(B\Gamma\Delta) = \lambda \Rightarrow \vec{B\Delta} = \lambda \vec{\Delta\Gamma}$, για τα Β, Δ, Γ συνευθειακά

- $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \dfrac{|\vec{B\Delta}|}{\vec{\gamma}} \Rightarrow |\vec{B\Delta}| = \sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \vec{\gamma}$ ①
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \dfrac{|\vec{\Gamma\Delta}|}{\vec{\beta}} \Rightarrow |\vec{\Gamma\Delta}| = \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \cdot \vec{\beta}$ ②

Αν ① $\div$ ② τότε $\dfrac{|\vec{B\Delta}|}{|\vec{\Gamma\Delta}|} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \vec{\gamma}}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \cdot \vec{\beta}} > 0$

αλλά $\vec{B\Delta} = \lambda \vec{\Delta\Gamma}$ με $\vec{B\Delta} \upuparrows \vec{\Delta\Gamma}$ άρα

$\dfrac{\vec{B\Delta}}{\vec{\Delta\Gamma}} = \lambda > 0$, Άρα $(B\Gamma\Delta) = \dfrac{(\vec{B\Delta})}{(\vec{\Delta\Gamma})}$

21) Δίνονται τα $A(1,1,1)$, $B(0,0,1)$, $\Gamma(3,3,0)$, $\Delta(1,0,0)$
ΝΔΟ τα Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο, να βρείτε το εμβαδόν του καθώς και τη γωνία $\hat{AB\Delta}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί τα Α, Β, Γ μη συγγραμμικά ή γραμμ. ανεξάρτητα.

$\vec{AB} = (-1,-1,0) \Rightarrow \vec{AB} = (1,1,0)$

$\vec{A\Gamma} = (2,2,-1)$ οι λόγοι, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{0}{1}$

άρα γραμμ. ανεξ., και έτσι ορίζουν τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ τ.μ.

$\vec{AB} \times \vec{B\Gamma} = \begin{vmatrix} \vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,0)$

$\sigma\upsilon\nu\hat{AB\Delta} = \dfrac{\vec{BA}\,\vec{B\Delta}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{B\Delta}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{AB\Delta} = \frac{\pi}{3}$ rad.